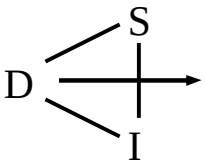


Calcolatori

CL - Elettronica

Facoltà di Ingegneria
Università degli Studi di Firenze

Algebra di Boole e
Sistemi di Numerazione e

Ver.: 2.0
Data: 22/08/2003

Questo documento fa parte di una serie di dispense. Tali dispense sono state realizzate anche utilizzando materiale prodotto da studenti e non sono state completamente ripulite da piccoli problemi. Si prega di segnalare ogni mancanza e correzione inviando una mail al Prof. P. Nesi al seguente indirizzo di posta elettronica con soggetto “dispense”: nesi@dsi.unifi.it.

INDI CE

1 Introduzione

1.1 Algoritmi

Il concetto di algoritmo e' uno dei concetti basilari della matematica. La parola algoritmo deriva dal nome del matematico arabo Al-Khuwarizmi vissuto nel IX secolo D.C.
Un algoritmo descrive un procedimento per risolvere una classe di *PROBLEMI in un numero finito di passi* descritti in modo rigoroso. La formalizzazione di un algoritmo significa trascrivere l'algoritmo da una scrittura informale (per esempio in linguaggio naturale) ad una prettamente formale ed avvolte anche matematica. Un algoritmo e' un elenco finito di istruzioni, passi, che devono *essere* eseguiti per arrivare alla soluzione finale del problema. (e.g., per fare una torta si segue una ricetta punto per punto, l'algoritmo). Gli algoritmi fanno uso di dati di ingresso e sono in grado di produrre dei risultati che costituiscono la soluzione del problema in questione. Se l'algoritmo non produce risultati serve a poco.

ESEMPIO DI ALGORITMO: "Calcolo delle radici di un polinomio di 2^0 grado"

Dato il polinomio $ax^2+bx+c=0$, si possono calcolare le radici x_1 e x_2 con il seguente algoritmo:

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c$$

$$x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{\Delta}\,) / (2\,a) \qquad \text{supponendo il } \Delta >= 0 ;$$

Algoritmo dell'esempio e' stato formalizzato con una notazione a voi nota, la notazione matematica.

I dati costituiscono le informazioni che vengono fornite dall'esterno dall'utente -- e.g., a, b, ed c.
L'algoritmo acquisisce dei dati dall'esterno e comunica i risultati all'ambiente esterno (per esempio la quantita' di persone che devono mangiare e la torta prodotta). I risultati sono il prodotto dell'algoritmo, in questo caso le radici dell'equazione oppure la torta nel caso della ricetta. L'algoritmo descrive come i risultati vengono prodotti in base ai dati. L'algoritmo e' composto di passi e di relazioni fra passi. L'algoritmo puo' essere eseguito da l'uomo o da macchine automatiche o da l'uomo con l'ausilio di macchine automatiche. In questo caso l'uomo esegue le istruzioni indicate nell'algoritmo sui dati che caratterizzano il particolare problema. L'algoritmo deve essere comprensibile per l'esecutore sia che questo sia un uomo che una macchina. Lo schema di esecuzione degli algoritmi e' costituito da alcune regole che indicano l'ordine di esecuzione delle istruzioni che lo costituiscono.

ESEMPI di algoritmi:
- Andare a fare la spesa
- Il calcolo di un prodotto
- Andare a iscriversi all'università
- Istruzioni per il noleggio
- Prelievo con bancomat
- Fare una torta

- Data una serie di numeri trovare il maggiore
- Dati due numeri trovare il MCD, massimo comune divisore
- Dati due numeri trovare il mcm, minimo comune multiplo

Vediamo come puo' essere strutturato un algoritmo riguardante la ricetta per cucinare una torta:

"Battere in una ciotola 100 g di burro fino a che non si ottiene una cremina. Aggiungere poco per volta fino a 150 g di farina, 2 uova, 1pizzico di sale, 100g di zucchero e 250 g di latte ottenendo una pasta piuttosto fluida. Versare l'impasto in una tortiera imburrata e mettere in forno a 180° per circa 1 ora".

L'insieme di operazioni da compiere e' rigorosamente ordinato (descritto dalla sequenza) e nel loro insieme determinano una serie di azioni concrete da svolgere secondo determinate regole. Il risultato finale, se tutti i passi sono stati eseguiti correttamente, e' la torta, altrimenti viene prodotto qualcosa di diverso…..

1.2 L'Elaboratore Elettronico Digitale

Fino a questo momento si e' accennato all'elaboratore senza però definire cos'è. L'elaboratore è quella "macchina" in grado di eseguire gli algoritmi forniti dall'utente sulla base di dati diversi ma in modo automatico. Una volta che fornito un algoritmo all'elaboratore, in molti casi questo è in grado di eseguire le istruzioni (lavorarci sopra) molto più rapidamente rispetto all'uomo. Sull'elaboratore l'utente può eseguire programmi diversi tra loro per tipologia e per formulazione, ma è necessario che venga usato un *LINGUAGGIO DI PROGRAMMAZIONE* compatibile con l'elaboratore stesso. Infatti, l'elaboratore è in grado di operare solo in base ad istruzioni redatte in un formato per lui eseguibile. Un algoritmo deve percio' essere descritto attraverso un linguaggio costituito da strutture linguistiche definite che sono comprensibili per chi le deve eseguire. Solitamente le descrizioni che vengono utilizzate per gli algoritmi (dette anche proposizioni) contengono sia una descrizione delle operazioni che devono essere eseguite, sia una descrizione degli oggetti sui quali si devono effettuare le operazioni per ottenere i risultati voluti. L'elaboratore e' flessibile perché permette di eseguire algoritmi diversi semplicemente cambiando il programma.
Pertanto con programmi diversi verranno utilizzati dati diversi o uguali e producono risultati diversi e/o uguali ma sempre coerenti con il programma.

I programmi possono essere scritti in *LINGUAGGIO MACCHINA o in linguaggi di alto livello, come vedremo*.

In parole semplici l'elaboratore e' una apparecchiatura AUTOMATICA, DIGITALE o ELETTRONICA capace di effettuare trasformazioni su dei dati in ingresso. Si dice elettronico quando l'ELABORATORE e' costruito con tecnologia elettronica. Mentre e' digitale quando lavora utilzzando una logica discreta caratterizzata da un precisione finita e da un numero finito di rappresentazioni.

E' necessario specificare che un elaboratore digitale, oltre a richiedere un dominio sui dati di ingresso e sull'applicazione, lavora sempre con numeri a *CIFRE FINITE*. Questo porterà in seguito ad approssimazioni nella rappresentazione di numeri.
Questa "limitazione" è data dal fatto che i calcolatori sono *SISTEMI DIGITALI*, non analogici, e quindi forniscono sempre una risoluzione finita (0/1). Tuttavia, anche se c'è una perdita in termini di precisione, con i sistemi digitali è possibile lavorare su numeri ben definiti.

Per essere eseguibile un algoritmo deve essere codificato in un linguaggio comprensibile per chi lo esegue. Gli elaboratori sono in grado di eseguire istruzioni se queste sono opportunamente codificate.
Un insieme di istruzioni ordinate secondo un certo schema che sono l'implementazione di un algorithmo puo' essere chiamato programma.

2 Algebra di Boole

I fondamenti dell'algebra Booleana sono stati delineati dal matematico inglese George BOOLE, nato a Lincoln nel 1815 e morto nel 1864, in un lavoro pubblicato nel 1847 riguardante l'analisi della logica e in particolare l'algebra della logica. Questa algebra include una serie di operazioni che si effettuano su delle variabili logiche, dette appunto variabili Booleane: quantita' che permettono di codificare le informazioni su due soli livelli. Nell'algebra di Boole essendo, a differenza di quella tradizionale, un'algebra binaria, i numeri possono assumere soltanto due *stati*, valori:

- 0/1;
- v/f (vero, falso);
- l/h (low, high);
- t/f (true, false);
- on/off; (acceso/spento)
- T,⊥ (true/false, vero/falso)

Usualmente si usa la notazione 0/1.

Su questi simboli si devono anche definire degli operatori e delle regole, che governano le operazioni, che ci permettono di utilizzarli:

- operatori prodotto logico, detta anche congiunzione, and (∧ , ∘, &&, ∗) ,
- somma logica, detta anche disgiunzione, or (∨,+, ||),
- negazione o complementazione not (### , -, ~, soprascritto, !),

Una proposizione, e' un costrutto linguistico, del quale si puo' dire se e' vero o falso, diventa un predicato quando in essa compare una variabile e il valore delle variabili determina il valore di verita' della proposizione stessa. Valutare il predicato significa quindi eseguire quell'operazione che ci consente di determinare la verita' o la falsita' del predicato stesso: i due valori "vero" o "falso" sono detti valori logici. I predicati che contengono un solo operatore sono detti predicati semplici mentre quelli composti sono caratterizzati dai simboli NOT, AND, OR.

Esempio: A>3 and B or D

2.1 Gli operatori di confronto

Gli operatori di confronto vengono usati per mettere a confronto due valori. Essi sono indicati nel modo seguente:

== uguale a **< > diverso da**
> maggiore di **>= maggiore o uguale a**
< minore di **<= minore o uguale a**

Il risultato del confronto e' puo' essere vero o falso..

2.2 Gli operatori Booleani: AND, OR, NOT

2.2.1 Operatore AND

L'operatore **and**, detto anche congiunzione logica, è definito come l'operatore che definisce A $\wedge$ B vero quando sia A che B sono veri.

es: <L'amplificatore funziona se è alimentato e ben costruito>

E' chiaro che debbono manifestarsi contemporaneamente due condizioni per il funzionamento dell'amplificatore:

1. deve essere alimentato
2. deve essere ben costruito

Assegnando opportunamente alle variabili binarie i valori <0> e <1> si può scrivere:

Y= (<1> l'amplificatore funziona, <0> l'amplificatore non funziona)
A= (<1> è alimentato, <0> non è alimentato)
B= (<1> è ben costruito, <0> non è ben costruito)

E' possibile ora compilare una tabella, detta ***tabella della verità*** ,che descrive il valore del risultato dell'operazione in funzione del valore degli operandi in cui compaiono tutte le 2^n possibili configurazioni delle variabili indipendenti, con *n* numero delle variabili.

A	B	A $\wedge$ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La tabella è in pieno accordo con l'equazione algebrica Y=A$*$B in quanto Y=1 (l'amplificatore funziona) se e soltanto se A e B valgono 1 (c'è alimentazione e l'amplificatore è ben costruito).

2.2.2 Operatore OR

L'operatore **or** ,detto anche disgiunzione logica, definisce A ∨ B vero quando A o B sono veri; la o ha carattere sia esclusivo (o questo o quello) sia carattere inclusivo (o questo o quello o entrambi).

A	B	A ∨ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

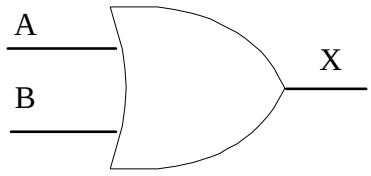
2.2.3 Operatore NOT

A differenza degli altri operatori, l'operatore not é unario in quanto la sua operazione riguarda un singolo elemento. La sua funzione é di far cambiare lo stato di un elemento, commutando l'elemento 1 in 0 e viceversa.

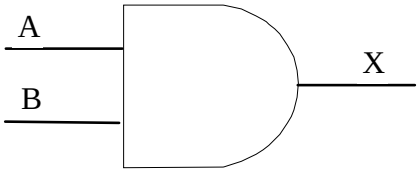
A	-A
0	1
1	0

2.2.4 And, Or, e NOT e i Circuiti

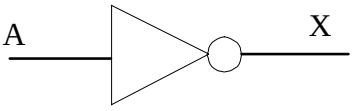
Da un punto di vista fisico le operazioni logiche dell'algebra booleana possono essere realizzate con dedei dispositivi elettronici noti come **porte logiche o circuiti elementari.**



X=A or B

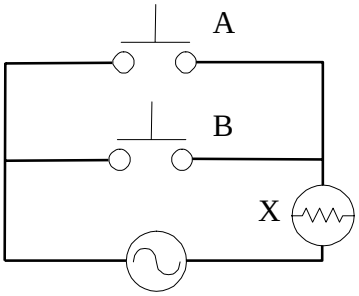


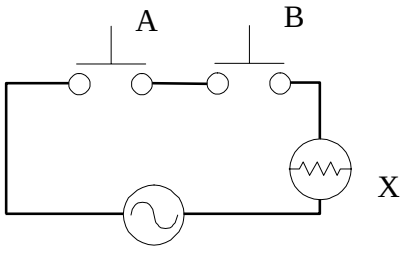
X=A and B

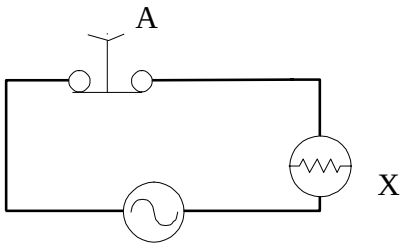


X = not A

Esempi di circuiti con le lampadine relativi alle operazioni AND, OR e NOT.







2.2.5 Implica e Coimplica

A -> B che si legge A IMPLICA B

Il termine **implica** non significa che se A e' vero (o falso) allora necessariamente B e' vero (o falso) come potrebbe lasciare intuire il significato comune del termine implica. Come e' possibile vedere dalla seguente tabella della verità A -> B e' equivalente a -A or B.

A	B	-A	-A or B
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Il significato commune di implica coincide maggiormente con il concetto dell'operatore logico **coimplica**.

A <-> B che si legge A COIMPLICA B e' equivalente a A -> B and B->A

A	B	-A	-B	-A or B	-B or A	-AorB and –BorA
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1

2.2.6 Proprietà degli operatori AND e OR

Di seguito sono riportate le proprieta' degli operatori AND e OR. Queste sono le tipiche proprietà di invarianza rispetto al prodotto e alla somma che in questo caso sono di and e or.

or	and
xv1=1	**$x_{\wedge}$1=x**
xv0=x	**$x_{\wedge}$0=0**
xvx=x	**$x_{\wedge}$x=x**
xv-x=1	$x_{\wedge}$-x=0

X significa don't care cioe' non ha importanza. Il suo valore non ha nessuna importanza ai fini della produzione del risultato, il valore finale del risultati e' invariante.

2.3 Teoremi dell'Algebra di Boole

L'and e l'or godono delle proprieta' commutativa, distributiva ed associativa.

1) Per ogni X,Y XvY= YvX COMMUTATIVA
X^Y = Y^X

2)Per ogni X,Y,Z X + (YZ) = (X +Y) (X +Z) Distributiva
X (Y+Z) = (XY) + (XZ)

3)Per ogni X,Y,Z X + (Y + Z) = (X + Y) + Z associativa
X (YZ) = (XY) Z

Inoltre vi sono le seguenti proprietà:

1) X+XY=X (assorbimento 1)
2) X+(-X)Y=X+Y (assorbimento 2)
3) XY+YZ+(-X)Z=XY+(-X)Z (assorbimento 3)
4) -(X+Y)=(-X)(-Y) **DE MORGAN**
Sono valide anche le duali

1) X(X+Y)=X
X+XY=X
-(X+XY)=(-X)
(-X)(-(XY))=(-X)
(-X)((-X)+(-Y))=(-X)
X(X+Y)=X

2) X((-X)+Y)=XY
X+(-X)Y=X+Y
(-X)+X(-Y)=-(X+Y)
(-X)(X+(-Y))=(-X)(-Y)
X((-X)+Y)=XY

3) (X+Y)(Y+Z)((-X)+Z)=(X+Y)((-X)+Z)

4) -(XY)=(-X)+(-Y)

Assorbimento 1) X+XY=X
L'assorbimento 1) si può dimostrare per esempio per mezzo della tabella della verita':

X+XY = X
Si puo' riscrivere come X(1+Y) = X ma 1+Y=1 che implica X=X

X	Y	XY	X+XY
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	1	1

Assorbimento 2)X+(-X)Y=X+Y

X(X+(-X)Y) = XX+XY
XX+X(-X)Y = XX + XY
X = X+XY

come prima

X	**Y**	**(-X)**	**(-X)Y**	**X+Y**	**X+(-X)Y**
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

Questo assorbimento si può dimostrare anche da un punto di vista matematico; pertanto :

X+(-X)=X+Y
X(X+(-X)Y)=XX+XY

Per la proprietà distributiva si ha:
XX+X(-X)=XX+XY;

inoltre ricordando che XX=X e X(-X)=0 si ottiene X=X+XY (ASSORBIMENTO 1)

Assorbimento 3)XY+YZ+(-X)Z=XY+(-X)Z

Z	**X**	**Y**	**(-X)**	**XY**	**YZ**	**(-X)Z**	**XY+YZ+(-X)Z**	**XY+(-X)Z**
0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	1

Teorema di De Morgan 4)-(X+Y)=(-X)(-Y)

X	**Y**	**(-X)**	**(-Y)**	**X+Y**	**-(X+Y)**	**(-X)(-Y)**

0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Duale del Teorema di De Morgan -(XY)=(-X)+(-Y)

X	Y	-X	-Y	XY	-(XY)	(-X)+(-Y)
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Come appare dal teorema di De Morgan e' superflua la scelta delle funzioni OR,AND,NOT come funzioni primitive: infatti l'operatore AND puo' essere espresso in funzione delle operazioni OR e NOT; analogamente l'operazione OR puo' essere espressa tramite AND e NOT. Pertanto e' facile verificare come l'espressione A>= OR B<0 equivalga a NOT(A<0 AND B>=0).

Infatti basta ricordare il teorema nella forma –(X and Y)= (-X) or (-Y).

A >= or B<0 Equivale a Not (A<0 and B>=0)

2.4 Operazioni binarie su sequenze di bit

Le operazioni dell'algebra di Boole, and, or e not possono essere eseguite anche come operazioni binarie su sequenze di bit, di caratteri binari. In tale caso le operazioni vanno effettuate considerando i bit uno per volta e su tale coppia di bit viene applicata la tabella corrispondente all'operatore.

Es per l'AND: 101101 and 010110

```
101101 and
010110=
----------
000100
```

Es per l'OR: 101110 or 010010=

```
101110 or
010010=
--------------
111110
```

Es per il NOT: -(101110)=010001

2.5 Sintesi, prodotti di somme e somme di prodotti

In precedenza sono state utilizzate le tabelle della verita' come rappresentazione della semantica degli operatori logici. Le tabelle della verita' in effetti specificano sia il vero che il falso. Per esempio dalla seguente tabella si ha che l'uscita Y e' vera in certe condizioni e falsa in altre. La tabelle e' un rappresentazione del tutto equivalente alla rappresentazione algebrica e si puo' passare da una all'altra in modo semplice.

A	**B**	**Y**
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Da questa tabella si puo' derivare la forma algebrica di Y andando a scrivere i termini positivi (che sono 1) come prodotti di somme:

Y = not A and not B + A and B

Dove si va riportare NOT quanto un ingresso e' falso.
Una soluzione equivalente e quella che permette di produrre Y andando a scrivere i termini negativi (che sono 0) come somme di prodotti:

Y = (not A + B) and (A + not B)

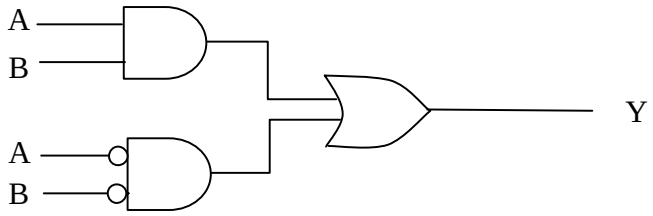
Le due forme sono equivalenti e lo si puo' dimostrare con facili passaggi, utilizzando il teorema di De Morgan:

(not A + B) and (A + not B) = not A and A + not A and not B + B and A + B and not B

in base alle proprietà di invarianza: not A and A = 0, B and not B= 0, pertanto:

(not A + B) and (A + not B) = not A and not B + A and B

che dimostra l'equivalenza dei due modelli di sintesi. Dalle equazioni e' facile passare al circuito che vede:



Ovviamente questa e' un rappresentazione in termini di somme di prodotti ma lo stesso circuito poteva essere realizzato con prodotti di somme. In tale caso si sarebbe utilizzato un AND e due OR e sempre due not. In base al teorema di De Morgan, anche il circuito presentato poteva essere realizzato solo con AND e NOT per esempio sostituendo l'OR con un AND con gli ingressi e le uscite negate.

2.6 Mascheratura AND e OR

Ai numeri binari si possono applicare le 3 OPERAZIONI LOGICHE: AND, OR i cui risultati sono calcolati in base alle rispettive tabelle della verita'.

L'operatore AND puo' essere utilizzato per effettuare le cosidette "mascherature":il metodo consiste nel sommare ad numero qualsiasi, del quale voglio calcolare il valore di una sua certa cifra, un numero costituito da tutti 0, tranne che in corrispondenza di quella determinata cifra. Ad esempio, se si desidera evidenziare la quarta cifra di un numero si potra' effettuare la seguente operazione di mascheratura dove il secondo numero (sequenza di bit) e' la maschera:

```
 0 1 1 0 1  1 1 0        AND
 0 0 0 0 X 0 0 0
_____________
 0 0 0 0 X 0 0 0
```

Se si ottiene un numero = a 0 allora la X =0, altrimenti se il numero e' diverso da 0 X=1 e anche il bit in posizione X nel numero originale era 1.

La maskeratura con l'operatore OR permette di riportare nel numero finale il valore dei bit di piu' numeri. Nel caso dell'esempio proposto, il primo numero presenta dei bit nulli mentre il secondo (la maschera) presenta dei bit XYZ con dei valori precisi. L'operazione di OR permette di fare la fusione fra questi due numeri.

Operatore OR

```
 1 0 1 0  0 0 0        OR
 0 0 0 0  XYZ
___________
 1 0 1 0  XYZ
```

2.7 Bit, Nibble, Bytes e Word

Un bit rappresenta una cifra binaria. Il bit è però un'unità di informazione troppo piccola per poter essere elaborata in modo efficiente. I bit pertanto sono trattati secondo i gruppi che seguono:

1 nibble = 4 bit
1 byte = 8 bit
1 word = 16 bit
1 doubleword = 32 bit
1 Kilobyte = 2^{10} byte=1024 byte=8196 bit
1 Megabyte = 2^{20} byte=1048576 byte~8 milioni bit
1 Gigabyte = 2^{30} byte~ 1miliardo byte~8 miliardi bit
1 Terabyte = 2^{40} byte~10^{12} byte~2^{43} bit

Nelle cifre binarie il bit meno significativo e' il primo a destra, questo viene chiamato LSB, Less Significant Bit. Il bit piu' significativo e' quello più sinistra, che viene chiamato MSB, Most Significant Bit.

3 Sistemi di Numerazione

3.1 Sistemi di Numerazione Posizionali

Per definire un sistema di numerazione si ha bisogno:
1. di una base, b
2. di un insieme ordinato di cifre, I{……..}, distinte l'una dall'altra con dimensione pari a quella della base: dim(I) = b, L'insieme contiene simboli che hanno una certa posizione nella base ordinata.
3. di un codice di interpretazione cioè di un insieme di regole che permettono di determinare quale sia il numero rappresentato da un gruppo di cifre,
4. di un insieme di regole e di algoritmi per definire le operazioni fondamentali.

es: $5b^3+3b^2+2b+4$ per esempio dove b=10 base decimale in cui l'insieme delle cifre e': 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Si hanno unita', decine, centinaia, etc.

Si possono usare anche altre basi

Booleana b=2 con [0,1], [V,F], [On, Off], etc.

Oppure base 5: b=5 con [0,1,2,3,4] [x,y,z,t,q]

Usando per esempio il numero (yzq) l'espressione seguente yb^2+zb+q con b=5 diventa :

y*25+z*5+q = 25+10+4=39

Ovviamente basi più piccole hanno potenza espressiva di rappresentazione minore. Cioe', un numero che ha N cifre in base B viene rappresentato con un numero minore o uguale di cifre da una base B1 piu' grande di B.

3.1.1 Base generica b, numerazione posizionale

Un sistema di numerazione in base b è un sistema di numerazione posizionale la cui base è b. Un numero in base b è un numero rappresentato utilizzando la numerazione in base b ed è una sequenza ordinata di cifre:

$$(C_{n-1}C_{n-2}.....C_1C_0 \,.\, C_{-1}C_{-2}.....C_{-m})_b$$

dove il simbolo "." è detto **punto di separazione o punto radice** e separa tra di loro le parti intera e frazionaria rappresentate la prima dalle *n* cifre $C_{n-1}.....C_0$ e la seconda dalle *m* cifre $C_{-1}.....C_{-m}$.
In effetti i coefficienti C rappresentano solo la posizione del simbolo nella base ordinata e non il valore della cifra. Questo risulta chiaro quando si realizzano basi con simboli e non con numeri ordinati.

Per esempio se si prende (tyq) in base 5 i coefficienti C sono rispettivamente 3, 1, 4.

Nella parte intera il peso associato alla cifra C_0, cioe' quella piu' a destra, è $b^0=1$, il peso associato alla cifra C_1 è $b^1=b$ e cosi via fino ad arrivare alla cifra C_{n-1} alla quale è associato il peso b^{n-1}.
Per quanto riguarda la parte frazionaria, si parte dal peso b^{-1}, che è quello associato alla prima cifra a sinistra C_{-1}, perché compare subito dopo il punto di separazione ,fino ad arrivare al peso b^{-m} associato all'ultima cifra a destra C_{-m}.
Qualunque sia il numero rappresentato, la cifra più a sinistra è la cifra più significativa del numero, la cifra più a destra è quella meno significativa. Una cifra e' quindi piu' significativa di un'altra se la sua posizione nel numero e' piu' a sinistra della posizione dell'altra cifra. Nel corso sono trattati esclusivamente i sistemi di numerazione posizionali. Tutti i sistemi di numerazione che si basano su un codice posizionale, possono essere scritti nella forma polinomia:

$$C_n b^n + C_{n-1}b^{n-1} + ... + C_0 . C_{-1}b^{-1} + ... + C_{-m} b^{-m}$$

Per esempio nel caso di numeri decimali si ha:

1246, che significa che n=3, C3=1, C2=2, C1=4, C0=6

$1\ 10^3 + 2\ 10^2 + 4\ 10 + 6$ in cui ad ogni posizione nella sequenza e' associato un certo peso dato dalla cifra che viene presentata nel numero stesso (dalla posizione che ha nella base tale simbolo della cifra).

Nel caso invece di numeri in base 5 con, ad esempio, il seguente sistema ordinato di cifre :[A,B,C,D,E], l'insieme dei seguenti simboli E D D A corrispondono al numero decimale 590.

Si ha infatti: E x 125 + D x 25 + D x 5 + A x 1 =590

In decimale, 590, cioe' tale numero intero rappresentato da EDDA si trova nella posizione 590 partendo dall'origine dell'asse dei numeri naturali. Questo permette di effettuare semplici conversioni da qualsiasi base alla base decimale.

3.2 Rappresentazione dei Numeri Binari in Virgola Fissa

Per quanto riguarda la rappresentazione dei numeri, possono essere usati più codici binari a seconda del tipo di informazione numerica considerata (ad esempio, numeri frazionari o numeri interi).
La rappresentazione binaria in virgola fissa (o rappresentazione fixed point) consiste nel rappresentare ciascun numero assumendo una posizione prefissata del punto di separazione.
In particolare essa é usata per rappresentare i numeri interi con la convenzione di porre il punto di separazione alla destra del bit meno significativo.
La rappresentazione in virgola fissa utilizza una quantità prefissata di memoria; ad esempio, nei processori intel 80386 e 80387 possono essere usate 1,2 oppure 4 gruppi di 16 bit.

Il sistema di numerazione binario si avvale di due simboli 0 e 1; ogni singola cifra di un numero binario prende il nome di bit (binary digit):

$$a_{n-1}\ 2^{n-1}+a_{n-2}\ 2^{n-2}+.....+a_1\ 2+a_0+a_{-1}\ 2^{-1}+.....+a_{-m}\ 2^{-m}$$

dalla forma polinomia. In questo caso, ovviamente i pesi associati alle cifre sono potenze del 2.

Un numero binario si legge un bit alla volta:
es.
$(10110)_2$ si legge uno zero uno uno zero

3.2.1 Dinamica dei numeri Binari

Dato un numero decimale intero e' inoltre sempre possibile calcolare il numero di bit necessari nella rappresentazione del corrispondente numero binario. Il massimo numero rappresentabile con "n" bit e' quel numero con "n" bit tutti uguali ad 1. Rifacendosi alla forma polinomia, ogni numero binario di tale forma si può scrivere nella seguente quantità decimale:

$$\sum_{h=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$$

Se ho ad esempio a disposizione 3 bit il piu' grande numero rappresentabile e' 7 perché 2*2+2+1=7, che poi equivale a 2 alla terza meno 1.
Si e' cosi' introdotto il concetto di **dinamica** di rappresentazione che verrà ripreso piu' accuratamente in seguito.

3.2.2 Conversione da binario a decimale

Per la conversione da binario a decimale si utilizza la forma polinomia. Per esempio il numero binario $(101011.011)_2$ in virgola fissa si può scrivere come

$1\,2^5+0\,2^4+1\,2^3+0\,2^2+1\,2^1+1\,2^0+0\,2^{-1}+1\,2^{-2}+1\,2^{-3}=$
$32 + 8 + 2 + 1 +0.25 +0.125=$
$(43.375)_{10}$

3.2.3 Conversione da decimale a binario, parte intera

Per la conversione da decimale a binario si devono trattare separatamente la parte intera e la parte frazionaria di un numero:

Per la **parte intera** si utilizza il metodo delle divisioni successive; si divide il numero per 2 e il resto rappresenta la cifra meno significativa in binario; si divide poi per 2 il quoziente ottenuto ed il resto rappresenta la seconda cifra dal punto, radice e così si procede fino ad avere il quoziente zero

Dimostrazione: si vuole convertire il numero intero N in base 2, trovando quindi una forma polinomia tale che:

$$N= a_{n-1}\,2^{n-1}+a_{n-2}\,2^{n-2}+.....+a_1\,2+a_0$$

In effetti posso scrivere il numero in questo modo:

$N = Q\ b + R$

dividendo entrambi i termini per la base 2 una prima volta si ottiene

$N/b = Q + R/b \Rightarrow$ $\quad N/2 = Q + R/2 = a_{n-1}\,2^{n-2} + a_{n-2}\,2^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + a_1 + (a_0 / 2)$

e quindi il quoziente $Q = a_{n-1}\,2^{n-2} + a_{n-2}\,2^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + a1$ mentre a0 e' il resto R. della prima divisione (e la cifra meno significativa della forma polinomia). Dividendo ora Q nuovamente per 2 si ottiene un nuovo quoziente Q1 e un nuovo resto R1:

$Q/2 = a_{n-1}2^{n-3} + a_{n-2}2^{n-4} + \ldots\ldots + a_1 2^{-1}$

Continuando a dividere per 2 i quozienti via via ottenuti, si arriva a determinare tutte le cifre binarie. Per esempio, si vuole convertire in binario il numero 43,

		resto	
43 / 2 =	21	1	$=a_0$
21 / 2 =	10	1	$=a_1$
10 / 2 =	5	0	$=a_2$
5 / 2 =	2	1	$=a_3$
2 / 2 =	1	0	$=a_4$
1 / 2 =	0	1	$=a_5$

segue che $(43)_{10} = (101011)_2$ (Per la determinazione del numero binario i resti delle varie divisioni vanno scritti nell'ordine inverso rispetto a come sono stati calcolati).

3.2.4 Conversione da decimale a binario, parte frazionaria

Per la **parte frazionaria** si utilizza il metodo dei prodotti successivi; nella prima operazione si moltiplica per 2 il numero da convertire, nelle successive si moltiplica per 2 la parte frazionaria del risultato della moltiplicazione precedente. Le cifre del numero binario sono costituite dalla parte intera del prodotto della moltiplicazione precedente (la prima cifra che si ottiene è la più significativa).

Dimostrazione: si vuole convertire il numero frazionario F in base 2, trovando quindi una forma polinomia tale che:

$F = a_{-1}\,2^{-1} + a_{-2}\,2^{-2} + \ldots\ldots\ldots + a_{-m}\,2^{-m}$

moltiplicando entrambi i termini per la base 2 una prima volta si ottiene

$F\,b = R + F' \Rightarrow$ $\quad F*2 = R + F' = a_{-1} + a_{-2}\,2^{-1} + \ldots\ldots\ldots + a_{-m}\,2^{-m+1}$

In cui a_{-1} rappresenta il valore della parte intera della moltiplicazione.
Moltiplicando adesso la parte frazionaria F1 si ottiene:

$F1x2 = a_{-2} + a_{-3}2^{-1} + \ldots\ldots + a_{-m}2^{-m+2}$

in cui a_{-2} e' la seconda cifra binaria; continuando su questa strada si determinano tutte le altre cifre binarie.
Per esempio se si vuole convertire il seguente numero decimale in virgola fissa 0.375 in binario

$0.375*2 = 0.750 \quad a_{-1} = 0$
$0.750*2 = 1.500 \quad a_{-2} = 1$
$0.500*2 = 1.000 \quad a_{-3} = 1$

segue che $(0.375)_{10}=(0.011)_2$

La maggior parte dei numeri frazionari non è rappresentabile in un numero finito di bit come nell'esempio precedente. Pertanto può risultare necessario fissare a priori il numero massimo di operazioni da eseguire e quindi i bit che si desidera avere nella rappresentazione o la precisione, che in definitiva sono la stessa cosa.

Per esempio, se si vuole convertire 0.90 in binario si utilizzano un massimo di 5 bit

$0.90*2 = 1.80 \quad a_{-1} = 1$
$0.80*2 = 1.60 \quad a_{-2} = 1$
$0.60*2 = 1.20 \quad a_{-3} = 1$
$0.20*2 = 0.40 \quad a_{-4} = 0$
$0.40*2 = 0.80 \quad a_{-5} = 0$

ci si arresta dopo 5 passaggi , facendo quindi un'approssimazione

$(0.90)_{10}$ è circa $(0.11100)_2$

3.2.5 Errore di Rappresentazione e Precisione

Il numero rappresentato in precedenza risulta sicuramente minore di 0.90 dal momento che si eliminano addendi dalla forma polinomia

$$a_{-1}*2^{-1}+ a_{-2}*2^{-2}+ .....+a_{-5}*2^{-5}+ a_{-6}*2^{-6}+ a_{-7}*2^{-7}$$

Per riprova, facendo la conversione binario decimale si ottiene che

$(0.11100)_2=(0.890625)_{10}<(0.90)_{10}$

L'approssimazione per difetto del numero decimale dal quale siamo partiti, porta quindi a una condizione di errore valutabile come

Errore Assoluto $E_A= V_V - V_R$ = Valore Vero V_V - Valore Rappresentato V_R
dall'esempio precedente si ottiene:

$E_A= 0.90\ (V_V)- 0.890625\ (V_R)=0.009375$

Errore Relativo $E_R=E_A/V_V$

dall'esempio : $E_R=0.0104$

Errore Percentuale $E_{\%}=E_R*100$

dall'esempio: $E_{\%}=1.04\%$

l'Errore Massimo dovuto all'approssimazione limitando il metodo dei prodotti successivi a k passaggi è:

$E_{max}=2^{-K}$ che risulta essere l'indice di **PRECISIONE** nella rappresentazione del valore in questione.

Dal momento che si trascura tutti gli addendi della forma polinomia da $a_{-K}*2^{-K}$ in poi sicuramente

$$a_{-K-1}*2^{-K-1}+ a_{-K-2}*2^{-K-2}+ \ldots\ldots <= a_{-K}*2^{-K}$$

cioè pari al peso dell'ultima cifra rappresentata.

Dall'esempio $E_{max}= 2^{-6}=0.015625>0.009375(E_A)$

Non si commettono errori quando nel procedimento delle moltiplicazioni successive si ottiene come risultato un numero con la parte frazionaria nulla.

Ad esempio nella conversione del numero decimale 0.4375 in binario si ha:

0.4375	* 2 = 0.875	0
0.875	* 2 =1.75	1
0.75	* 2 = 1.5	1
0.5	* 2 =1.0	1

Quindi l'errore commesso e' 0.

Dato un numero finito N di bit con cui poter rappresentare in binario un numero intero è possibile determinare il numero più grande rappresentabile. Se ad esempio dispongo di 5 bit, il numero massimo rappresentabile è

$(11111)_2$ che in forma polinomia è $1*2^4+1*2^3+1*2^2+1*2^1+1*2^0$

Cioè si hanno 2^N combinazioni da 0 a 2^n -1. Il bit di peso massimo ha come peso 2^(n-1).

Il numero massimo rappresentabile è dato da

2^N-1 (***Dinamica di Rappresentazione***)

Viceversa dato un numero decimale D si può determinare il numero N di bit necessari per la rappresentazione del corrispondente numero binario; N è il più piccolo intero tale che

$2^N-1>D$

e quindi $N=\log_2(D+1)$, approssimando per eccesso all' intero successivo

es. D=2073 $N=\log_2 2074=12$ $2^{12}=4096>2073$

11 bit non sarebbero stati sufficienti perché il numero massimo rappresentabile con questi è
$2^{11}-1 = 2047 < 2073$

Pertanto nella rappresentazione dei numeri in virgola fissa posso decidere quanti bits ho bisogno per la parte intera (che dinamica ho nella rappresentazione) e per la parte frazionaria (che precisione ho nella rappresentazione).

2 alla n	**N**	**2 alla - n**
1	0	1.0
2	1	0.5
4	2	0.25
8	3	0.125
16	4	0.0625
32	5	0.03125
64	6	0.015625
128	7	0.0078125
256	8	0.00390625
512	9	0.001953125
1024	10	0.0009765625
2048	11	0.00048828125
4096	12	0.000244140625
8192	13	0.0001220703125
16384	14	0.00006103515625
32768	15	0.000030517578125
65536	16	0.0000152587890625
131072	17	0.00000762939453125
262144	18	0.000003814697265625
524288	19	0.0000019073486328125
1048576	20	0.00000095367431640525

3.3 Operazioni fra numeri Binari,

3.3.1 Somma fra Binari

E' possibile definire l'operazione di somma tra due numeri binari A e B tramite la seguente tabella:

A	B	A+B	Riporto
0	0	0	/
0	1	1	/
1	0	1	/
1	1	0	1

Il **riporto** nasce dal fatto che 1 + 1 =2 ma nel sistema binario non esiste il simbolo 2 e quindi occorre riportare l'1 nella posizione seguente che ha valore 2. Percio'quando la somma é maggiore di 1, si deve effettuare il riporto di 1 sulla cifra immediatamente a sinistra. Il riporto fa si che 1+1 produca un risultato pari a 10 che in binario vale 2.
Per esempio si veda la seguente operazione di somma fra binari interi. In entrambe i casi il risultato e' 64.

```
  1 1 1 1          Riporto        verifica decimale
   100110+                           38+
   011010=                           26=
  1000000                            64
```

3.3.2 Sottrazione fra Binari

Analogamente a quanto fatto per la somma, è possibile ricorrere a una tabella anche per la differenza.

Prestito	A	B	A-B
/	0	0	0
1	0	1	1
/	1	0	1
/	1	1	0

Se il minuendo è minore del sottraendo la sottrazione si effettua con il prestito di 1 dalla cifra immediatamente a sinistra (se anche questa è uguale a 0 si scorre a sinistra fino alla prima cifra uguale a 1): effettuando il prestito al posto dell'1 prestato rimane lo 0.

Esempi di differenze tra numeri binari:

```
          10  0  10  10          Prestiti          0  1  1 10  1  1  1 10
1 0 1 1 0 1 1 0 1-                                1 0 0 1 0 0 0 0-
1 0 0 0 1 0 1 1 0=                                    1 1 0 0 0 1=
---------------------                             ---------------------
0 0 1 0 1 0 1 1 1                                   1 0 1 1 1 1 1
```

3.3.3 Moltiplicazione fra Binari

A	B	A*B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tenuto conto che se il moltiplicatore è 1, il prodotto è uguale al moltiplicatore, e se il moltiplicatore è 0 il prodotto è 0, la moltiplicazione binaria si riduce, come quella decimale, ad una addizione di prodotti parziali. Per esempio

Verifica decimale

```
     1001110 X 10101          78 X 21=1638
     1001110
   1001110--
 1001110--
 ---------------
 11001100110          (11001100110)2 = (1638)10
```

3.3.4 Divisione fra Binari

La divisione binaria si svolge in modo analogo a quella decimale; procede quindi per sottrazioni tra parti del dividendo e divisore.

Es.

```
    dividendo          divisore          verifica decimale
11001100110 |   10101              1638 : 21 = 78
            |---------
10101           1001110          ( 1001110 )2 = ( 78 )10
00100100
   10101
    11111
    10101
    010101
     10101
         0
```

Per la lezione:
Fare prima il prodotto di due numeri binari magari uno con virgola mobile

1101 x 11.01

il risultato potra' essere diviso per 1101 in modo perfetto, cioe' potra' essere preso come dividendo. Altrimenti il numero puo' risultare no divisibile e pertanto si puo' arrivare a un risultato che ha infinite cifre dopo la virgola.

3.3.5 Scorrimento a destra e sinistra di numeri binari

Sui numeri binari esistono inoltre altre due operazioni : **SCORRIMENTO A DESTRA (SHR) e SCORRIMENTO A SINISTRA (SHL).**

Prendiamo ad esempio il numero binario 10101101 che corrisponde al numero decimale 173;operare uno scorrimento a sinistra significa trasferire tutti i bit del numero binario di un posto alla propria sinistra in modo che il bit meno significativo diventi = a 0. Otteniamo cosi' il numero 101011010 che corrisponde a $(346)_{10}$: come possiamo facilmente notare il numero e' stato semplicemente raddoppiato e percio' possiamo affermare che lo SHL corrisponde ad una moltiplicazione per 2.Eseguendo "n" scorrimenti a sinistra, eseguo "n" moltiplicazioni per 2 del numero in questione.
Al contrario lo SHR, che consiste nel far scorrere di un posto a destra ogni cifra del numero ,corrisponde ad una divisione per 2.

3.4 Numeri Ottali

Per convenzione i simboli utilizzati dal sistema ottale sono i seguenti:

0,1,2,3,4,5,6,7

nella forma polinomia il peso associato ad ogni cifra è una potenza dell'8; avremo quindi:

$$a_{n-1}*8^{n-1}+a_{n-2}*8^{n-2}+.....+a_1*8^1+a_0*8^0$$

3.4.1 Conversione da ottale a decimale

La conversione da ottale a decimale si avvale della forma polinomia.
Ad esempio:

$$(1534)_8 = 1*8^3+5*8^2+3*8^1+4*8^0 = 512+320+24+4 = (860)_{10}$$

Per la conversione inversa si utilizza il metodo delle divisioni successive, dividendo per 8 se si tratta di un numero intero e moltiplicando per 8 (metodo delle moltiplicazioni successive) se si tratta di un numero frazionario.

		resto
5437 / 8 =	679	5 $=a_0$
679 / 8 =	84	7 $=a_1$
84 / 8 =	10	4 $=a_2$
10 / 8 =	1	2 $=a_3$
1 / 8 =	0	1 $=a_4$

segue che $(5437)_{10} =(12475)_8$

3.4.2 Conversione da numeri ottali a binari

Per la conversione da numeri ottali a binari è necessario evidenziare le analogie esistenti tra forma polinomia ottale e forma polinomia binari.

La forma polinomia di un numero binario

an-1 2n-1+an-2 2n-2+.....+a8 28+a7 27+.....+a2 22+a1 2+a0

può essere scritta raggruppando tre addendi alla volta

(a8 22+a7 21+a6) 26 +(a5 22+a4 21+a3) 23+(a2 22+a1 21+a0) 20

si può osservare che:

- 20 = 80 = 1
  23 = 81 = 8 (le potenze dell'8 sono coefficienti della forma polinomia ottale)
  26 = 82 = 64

- un coefficiente della forma polinomia ottale può essere espresso con 3 bit

.....+(an 22+an-1 21+an-2 20) 2n-2+.....(forma polinomia binaria)
.....+(bP) 8p +.....(forma polinomia ottale)

per le conversioni tra numeri ottali e numeri binari si tenga presente la seguente tabella:

Ottale/Decimale	Binario
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Es.

(1 5 3 7) 8
001 101 011 111

segue che (1537)8= (001/101/011/111)2

Es. di conversione da binario a ottale in cui il numero viene suddiviso a gruppi di tre cifre,da destra verso sinistra,aggiungendo degli zeri nell'ultimo gruppo a destra se necessario e convertendo poi ciascun gruppo di tre cifre binarie nella sua corrispondente cifra ottale.

(100 /110 /011 /001)2
4 6 3 1

segue che (100/110/011/001)2=(4631)8

Per la conversione della parte frazionaria, analogamente a quanto visto per la parte intera, si raggruppano tre addendi alla volta partendo dalla cifra più significativa e spostandosi verso destra.

Es. (0.101/110/010)2=(0.562)8

Come possiamo facilmente notare dagli esempi,la rappresentazione ottale e' piu' compatta dal momento che ad ogni cifra ottale corrispondono 3 bits:pertanto ogni numero ottale con "n" cifre rappresenta un numero binario di 3"n" cifre.

3.5 Numeri Esadecimali

I simboli esadecimali (della base esadecimale) sono:

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

(i codici A, B, C, D, E, F, corrispondono in decimale rispettivamente ai numeri 10, 11, 12, 13, 14, 15).
La forma polinomia esadecimale é la seguente:

$$a_{n-1}\ 16^{n-1}+a_{n-2}\ 16^{n-2}+.....+a_1\ 16^1+a_0$$

la forma polinomia rende possibile la conversione da esadecimali a decimale.
es.

$$(C34BD)_{16} = C\ 16^4+3\ 16^3+4\ 16^2+B\ 16^1+D\ 16^0=$$
$$12\ 16^4+3\ 16^3+4\ 16^2+11\ 16^1+13\ 16^0 = (799933)_{10}$$

3.5.1 Conversione da decimale a esadecimale

Per la conversione da decimale a esadecimale si procede con il metodo delle divisioni successive
es.

		resto
64570	/ 16 = 4035	10=A= a_0
4035	/ 16 = 252	3= 3 = a_1
252	/ 16 = 15	12=C =a_2
15	/ 16 = 0	15=F =a_3

segue che (64570)10=(FC3A)16

3.5.2 Conversioni tra numeri esadecimali e numeri binari

Per le conversioni tra numeri esadecimali e numeri binari è necessario osservare le analogie fra forma polinomia binaria e forma polinomia esadecimale

$....+a_7\,2^7+a_6\,2^6+.....+a_1\,2^1+a_0\,2^0=$

$....+(a_7\,2^3+a_6\,2^2+a_5\,2^1+a_4\,2^0)\,2^4+(a_3\,2^3+a_2\,2^2+a_1\,2^1+a_0\,2^0)\,2^0=$

$....+\quad (b_1)_{16}\qquad 16^1+\quad (b_0)_{16}\qquad 16_0$

se ne deduce che ogni coefficiente esadecimale può essere espresso con 4 bit.
Per le conversioni tra numeri esadecimali e numeri binari si tenga presente la seguente tabella :

Esadecimale	Binario	decimale
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
A	1010	10
B	1011	11
C	1100	12
D	1101	13
E	1110	14
F	1111	15

Esempio di conversione da esadecimale a binario in cui ogni cifra viene convertita nel corrispondente numero binario a quattro cifre:

$(A \quad D \quad 5 \quad F)_{16}$
1010 1101 0101 1111

segue che $(AD5F)_{16}= (1010110101011111)_2$
Esempio di conversione binario-esadecimale ottenuta utilizzando le rispettive corrispondenze:

$(0110/0111/1001/1101)_2$
6 7 9 D
segue che$(0110011110011101)_2=(679D)_{16}$

Per la conversione della parte frazionaria, analogamente a quanto visto per la parte intera, si raggruppano quattro addendi alla volta partendo dalla cifra più significativa e spostandosi verso destra.
es. $(0.10110111101011)_2=(0.B7AC)_{16}$

3.6 Forma complemento

Si definisce forma complemento a b di un numero intero N in base b con k cifre quel numero che sommato a N da':

$$C_b(N)=b^k\text{-}N$$

O equivalentemente $N+C_b(N)=b^k$

Si ricordi che il valore b^k è dato, qualunque sia la base *b*, dal primo simbolo della base dopo lo zero e quindi in base 10 e 2 si ha che e' un 1 seguito da *k* cifre uguali a zero

$10^k \rightarrow 10^4 = 10000$

Es. *k*=4 b^k $2^k \rightarrow 2^k = 10000$

Es. $C_{10}(562)$ Dunque $b^k = 1000$

$C_{10}(562) = 1000 - 562 = 438$

Es. Prendendo un numero binario: $N = (101)_2$

$b^k = 1000$ $C_2(101) = 1000 - 101 = 11$

3.6.1 Complemento a b-1

Si definisce complemento a $b-1$ di un numero intero *N*, rappresentato in base b con k cifre, il numero $C_{b-1}(N)$ in base *b* tale che:

$C_{b-1}(N) = b^k - 1 - N$

$N + C_{b-1}(N) = b^k - 1$

Si nota che essendo $b^k\text{-}N\text{-}1=C_b(N)\text{-}1$, otteniamo $C_{b-1}(N)=C_b(N)\text{-}1$

Si ricordi che il valore $b^k - 1$ è rappresentato, qualunque sia la base *b*, da *k* cifre tutte uguali a $b-1$ cioe' all'ultimo simbolo della base. Per esempio in base 10 a una serie di 9 ed in base 2 ad una serie di 1. In tali basi si parla pertanto di complemento a 9 ed ad 1 rispettivamente.

Esempio. Nel sistema decimale:

$C_9(35722)=100000-35722-1=64277$
Infatti $N(=35722)+C_9(N)(=64277)=99999$

Esempio. Nel sistema binario:
$C1(10011)=100000-10011-1=11111-100110=1100$
Infatti $C1(N)+N=11111$

3.6.2 Proprietà e relazioni

Il complemento gode delle seguenti proprietà:

1) $C_b(N)=C_{b-1}(N)+1$

Dim.: $N+C_{b-1}(N)=b^k-1$

$C_{b-1}(N)+1=b^k-N$

dalla definizione di complemento si ottiene: $C_{b-1}(N)+1=C_b(N)$

2) $C_b(C_b(N))=N$

Dim.: ricordando che $C_b(N)=b^k-N$, cioè $C_b(b^k-N)=N$
Si ottiene, sostituendo ad N tale valore a destra della prima espressione. Il complemento di b^k-N, e' pari a b^k-b^k+N, pertanto si ha che: N=N

3) $C_{b-1}(C_{b-1}(N))=N$

Anche questo si dimostra nello stesso modo.

3.6.3 Complementi Veloci

Per calcolare il complemento a 1 e a 2 di un numero binario si può ricorrere ai seguenti procedimenti:

Complemento a 1 veloce:

-Il complemento a 1 di un numero binario si ottiene trasformando le cifre zero in uno e viceversa (che equivale ad eseguire un'operazione **not**).

Tale operazione deriva direttamente dalla proprietà 1); infatti:

$C_{b-1}(N)=(b^k-1)-N$

Ricordiamoci che b^k-1 equivale, in base 2, ad un numero costituito da k zeri; inoltre si nota come l'operazione di sottrazione dalla cifra 1 equivalga ad un'operazione di **not**

Es. Complemento a 1 veloce

$k=6 \quad N=101001$

$2^6-1=111111$

$$\begin{array}{l} 111111 \; - \\ \underline{101001 \; =} \\ 010110 \; \rightarrow \end{array} \text{ quindi } C_{b-1}(N)_2 = not(N)_2$$

L'operazione di sottrazione fra 1 e 0 e fra 1 e 1 sono equivalenti all'applicazione dell'operatore not.

Complemento a 2 veloce

Per calcolare più velocemente il complemento a 2 si puo' utilizzare il seguente algoritmo:

Tutto ciò si può riassumere dicendo che il complemento a 2 di un binario si ottiene riscrivendo così come sono tutti i bit del numero a partire da quello meno significativo fino al primo bit uguale a 1, compreso, e eseguendo l'operazione **not** su tutti gli altri.

Es.: complemento a 2 veloce

N=10001101; C_1(N)=01110010;

C_2(N)=C_1(N)+1=01110011 che rispecchia il caso in cui l'ultima cifra di (N) sia uno.

Es.:complemento a 2 veloce

N=01101100; C_1(N)=10010011;

C_2(N)=C_1(N)+1=10010100 che rispecchia il caso in cui l'ultima cifra di (N) sia zero (in questo caso l' algoritmo di pagina 38 è stato percorso tre volte).

3.6.4 Sottrazioni con il complemento

Per calcolare la differenza $X-Y$ tra due numeri in una qualunque base *b*, dove *X* è un numero di *k* cifre si possono eseguire le seguenti operazioni:

$$X-Y=X-Y+b^k-b^k=$$

$$=X+b^k-Y-b^k=$$
$$=X+C_b(Y)-b^k$$

Per esempio si supponga di effettuare la sottrazione tra numeri decimali $742-593=149$
Questa differenza può essere calcolata come:

$$742-593+1000=$$
$$742+(1000-593)=$$
$$742+407=$$
$$1149=X-Y+b^k$$

Infatti per ottenere 149 (cioè X-Y) basta togliere b^k(cioè 10^3=1000). Questo e' la cifra 1 che 'avanza' a sinistra.

Ricordiamo che b^k espresso in qualunque base è seguito da k zeri: perciò tale differenza si riduce al non considerare il traboccamento.

con questo procedimento ho trasformato una sottrazione in una somma tra *X* e il complemento di *Y*. Ciò permette di effettuare una differenza senza avere alcuna operazione di prestito.

$$\text{Es.}(X)_2=11001100 \qquad (Y)_2=11000010$$
$$C_2(Y)=00111110$$

$$11001100+$$
$$\underline{00111110=}$$
$$\text{traboccamento che verrà trascurato}\rightarrow 1|00001010|$$

Trascurare la cifra più significativa equivale a sottrarre al risultato ottenuto b^k in questo caso 2^8,cioè $(100000000)_2$

4 Rappresentazione dei Dati

4.1 Codifica dell'informazione

Tutte le informazioni inserite in un elaboratore, o emesse dall'elaboratore stesso sono rappresentate nel cosiddetto *alfabeto esterno*, i cui caratteri generalmente sono le 26 lettere (maiuscole e minuscole) dell'alfabeto inglese, le 10 cifre decimali, i vari segni di interpunzione (tra i quali è compreso anche lo spazio), i simboli matematici, e i vari caratteri di controllo.
All'interno dell'elaboratore però i dati devono essere rappresentati con l'*alfabeto interno* che è quello binario, i cui unici caratteri sono 0 e 1. Questa necessità è data dal fatto che tutte le componenti di un elaboratore (transistor, nastri magnetici, etc...) possono trovarsi soltanto in due stati, corrispondenti ovviamente alle cifre 0 e 1.
E' chiaro allora che ogni volta che vengono immesse delle informazioni all'interno dell'elaboratore queste debbano essere *codificate*, cioè tradotte dall'alfabeto esterno a quello interno. Ugualmente le informazioni emesse dall'elaboratore devono essere *decodificate*. All'interno di un elaboratore possono essere utilizzati anche codici diversi (purché ovviamente siano utilizzati in parti diverse dell'elaboratore stesso).
Le codifiche più usate per i dati di tipo alfanumerico, sui quali cioè non è possibile eseguire operazioni numeriche, sono l'EBCDIC (Extended Binary Code Decimal Interchange Code) e soprattutto l'ASCII (American Standard Code for Information Interchange). In entrambe le codifiche ogni carattere richiede un byte per essere rappresentato; il primo semibyte (nibble) è detto *zone*, il secondo *digit*.

4.2 Codifica ASCII

Per quanto riguarda la codifica ASCII è bene precisare che originariamente era una codifica a 7 bit e solo in un secondo momento è stata forzata a diventare a 8 bit ponendo il bit più significativo uguale a zero. Attualmente esiste una versione (codice ASCII *esteso*) che sfrutta anche l'ottavo bit per un totale di 256 codifiche.
Di seguito è riportata la tabella ASCII nella versione precedente a quella estesa

				Z	0	0	0	0	0	0	0	0
				O	0	0	0	0	1	1	1	1
				N	0	0	1	1	0	0	1	1
d i g i t					0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	NUL	DLE	SP	0	@	P		p
0	0	0	1	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0	0	1	0	STX	DC2	“	2	B	R	b	r
0	0	1	1	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0	1	0	0	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
0	1	0	1	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0	1	1	0	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0	1	1	1	BEL	ETB	‘	7	G	W	g	w
1	0	0	0	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1	0	0	1	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1	0	1	0	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1	0	1	1	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1	1	0	0	FF	FS	,	<	L	\	l	|
1	1	0	1	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1	1	1	0	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1	1	1	1	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

Es. La codifica ASCII di 72 è 00110111|00110010.

**** Si noti che le codifiche ASCII e EBCDIC sono utilizzate per rappresentare informazioni di tipo alfanumerico. Anche le sequenze di cifre come “72” non sono dunque, come già detto, numeri sui quali poter effettuare operazioni, ma semplici informazioni espresse da numeri, come per esempio numeri telefonici. I numeri veri e propri si esprimono nelle forme già viste (valore assoluto con segno, rappresentazione complemento a 1 e a 2).****

La codifica ASCII ad 8 bit e’ riportata nella seguente tabella dove il valore e’ riportato in decimale e destra e’ disegnato il simbolo corrispondente della tastiera e dello schermo.

0		32		64	@	96	`	128	Ç	160	á	192	└	224	α
1	☺	33	!	65	A	97	a	129	ü	161	í	193	┴	225	ß
2	☻	34	"	66	B	98	b	130	é	162	ó	194	┬	226	Γ
3	♥	35	#	67	C	99	c	131	â	163	ú	195	├	227	π
4	♦	36	$	68	D	100	d	132	ä	164	ñ	196	─	228	Σ
5	♣	37	%	69	E	101	e	133	à	165	Ñ	197	┼	229	σ
6	♠	38	&	70	F	102	f	134	å	166	ª	198	╞	230	µ
7	•	39	'	71	G	103	g	135	ç	167	º	199	╟	231	τ
8	◘	40	(	72	H	104	h	136	ê	168	¿	200	╚	232	Φ
9	○	41	)	73	I	105	i	137	ë	169	⌐	201	╔	233	Θ
10	◙	42	*	74	J	106	j	138	è	170	¬	202	╩	234	Ω
11	♂	43	+	75	K	107	k	139	ï	171	½	203	╦	235	δ
12	♀	44	,	76	L	108	l	140	î	172	¼	204	╠	236	∞
13	♪	45	-	77	M	109	m	141	ì	173	¡	205	═	237	φ
14	♫	46	.	78	N	110	n	142	Ä	174	«	206	╬	238	ε
15	☼	47	/	79	O	111	o	143	Å	175	»	207	╧	239	∩
16	►	48	0	80	P	112	p	144	É	176	░	208	╨	240	≡
17	◄	49	1	81	Q	113	q	145	æ	177	▒	209	╤	241	±
18	↕	50	2	82	R	114	r	146	Æ	178	▓	210	╥	242	≥
19	‼	51	3	83	S	115	s	147	ô	179	│	211	╙	243	≤
20	¶	52	4	84	T	116	t	148	ö	180	┤	212	╘	244	⌠
21	§	53	5	85	U	117	u	149	ò	181	╡	213	╒	245	⌡
22	▬	54	6	86	V	118	v	150	û	182	╢	214	╓	246	÷
23	↨	55	7	87	W	119	w	151	ù	183	╖	215	╫	247	≈
24	↑	56	8	88	X	120	x	152	ÿ	184	╕	216	╪	248	°
25	↓	57	9	89	Y	121	y	153	Ö	185	╣	217	┘	249	∙
26	→	58	:	90	Z	122	z	154	Ü	186	║	218	┌	250	·
27	←	59	;	91	[	123	{	155	¢	187	╗	219	█	251	√
28	∟	60	<	92	\	124	¦	156	£	188	╝	220	▄	252	n
29	↔	61	=	93	]	125	}	157	¥	189	╜	221	▌	253	2
30	▲	62	>	94	^	126	~	158	₧	190	╛	222	▐	254	■
31	▼	63	?	95	_	127	⌂	159	ƒ	191	┐	223	▀	255	

4.3 Codifica BCD

Per rappresentare solo quantità di tipo numerico, c'è un'altra codifica: la BCD (Binary Coded Decimal). Essa trasforma ogni cifra decimale nel corrispondente numero binario. Poiché la cifra decimale più grande (9) corrisponde a $(1001)_2$ per rappresentare una cifra serviranno 4 bit.

Per esempio la codifica BCD di 56 è
0101 0110 (la codifica binaria di 56 invece è 111000).

Tabella BCD

Cifra Decimale	Codifica BCD
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Es: somme con riporto

Vogliamo sommare 73 e 35;

73 in BCD 0111 0011 ; 35 in BCD 0011 0101;
7 3 3 5

0111 0011 +
0011 0101 =
1010 1000

↘ però questo numero non esiste in BCD, perciò il risultato verrà scritto, usando un linguaggio corretto, come

0001 0000 1000
1 0 8 che fornisce il corretto risultato.

4.4 Confronto fra le varie rappresentazioni

Possiamo già fare un confronto tra le varie rappresentazioni di numeri in termini di spazio occupato, ossia di byte, per registrare la stessa informazione.

Esempio: $(4567)_{10}$ Vediamo quanto spazio occupa questa informazione numerica nelle varie rappresentazioni:

ASCII	BCD	Binario	Ottale	Esadecimale
32 bit	16 bit	13 cifre	5 cifre	4 cifre
(1 byte per cifra)	(4 bit per cifra)			

4.5 Codifica dei Numeri Interi

Per codificare i numeri possono essere usati più codici binari a seconda del tipo di informazione numerica (numeri frazionari,interi...). La rappresentazione binaria in virgola fissa (o fixed point) rappresenta ciascun numero assumendo una posizione prefissata del punto di separazione e utilizza una quantità prefissata di memoria. In particolare la rappresentazione in virgola fissa può essere usata per rappresentare i numeri interi. Sono possibili più codifiche che differiscono per il criterio usato nella rappresentazione dei numeri negativi:

-Forma valore assoluto con segno
-Forma complemento a 2
-Forma complemento a 1

4.5.1 Forma valore assoluto con segno

Consiste nel rappresentare il segno e il valore assoluto (o modulo) del numero intero separatamente. Qualunque sia il numero n di bit usati, il bit più a sinistra, cioè la cifra più significativa, è utilizzata per rappresentare il segno (0 per un numero positivo, 1 per un numero negativo); i restanti $n-1$ bit rappresentano la codifica binaria del modulo.

Es. per n=8 si ha:

Numero	Segno	Modulo
+13	0	0001101
−13	1	0001101

Con questo tipo di rappresentazione il rango dei numeri rappresentabili con n bit è:

$$-2^{n-1}+1,-2^{n-1}+2,\ldots,-0,+0,\ldots,2^{n-1}-2,2^{n-1}-1$$

Perciò si ha una dinamica di $\pm(2^{n-1}-1)$

Per esempio Codifica con 8 bit

$$-(2^7-1),\ldots,-0,+0,\ldots,2^7-1$$
$$-127,\ldots,-0,+0,\ldots,127$$

Si riporta una tabella semplificativa

127	0111 1111
	:
2	0000 0010
1	0000 0001
+0	0000 0000
-0	1000 0000
-1	1000 0001
-2	1000 0010
	:
-127	1111 1111

Quindi è possibile rappresentare 255 numeri binari diversi (non 256 perché ho una doppia rappresentazione dello zero: 0 0000000 e 1 0000000).

4.5.2 Rappresentazione complemento a 2

La rappresentazione nella forma complemento a 2 è la più usata per rappresentare i numeri durante la fase di elaborazione. Essa consiste nel rappresentare i numeri positivi nella tradizionale forma binaria e ogni numero negativo $-X$ per mezzo del complemento a 2 del corrispondente numero positivo $+X$. In pratica, con la codifica nella forma complemento a 2, si ha che l'usuale valore posizionale è associato a ciascuna cifra binaria con l'esclusione del bit più significativo al quale è associato un valore negativo; in pratica inoltre, il bit più significativo è indice del segno del numero (0=+, 1=--), anche se riveste un altro significato numerico.

Ad esempio se si utilizzano 8 bit si ha che i pesi associati alle cifre del numero binario sono:

-128 64 32 16 8 4 2 1.

Il rango dei numeri rappresentabili con n bit è:

$$-2^{n-1},-2^{n-1}+1,\ldots,0,\ldots,2^{n-1}-2,2^{n-1}-1.$$

cioè una dinamica $-2^{n-1} \leq N \leq 2^{n-1}-1$

in questo caso si andrebbe da -128 a 127.

Es. n=8

Dovendo codificare in forma complemento a 2 il numero decimale 53 si esegue la conversione in forma binaria ottenendo così 110101. Poiché si hanno sei cifre e si vuole eseguire una rappresentazione a 8 bit è necessario aggiungere due zeri a sinistra: 00110101.

Se invece si vuole rappresentare -53 si esegue il complemento a 2 di 00110101, ottenendo così 11001011

Adesso è possibile rappresentare 256 numeri,compreso lo zero;vediamolo in tabella

127	0111 1111
2	0000 0010
1	0000 0001
0	0000 0000
-1	1111 1111
-2	1111 1110
-3	1111 1100
-128	1000 0000

Attenzione a non confondere la rappresentazione in forma complemento a 2 con il complemento a 2 di un numero.

Oggi comunque si lavora perlopiù con 16 bit(-2^{15};2^{15}-1) oppure con 32 bit, raggiungendo una dinamica di circa 2 miliardi.

Facendo operazioni di somma e differenza tra due numeri in forma complemento a 2 ci si può trovare di fronte a dei riporti scomodi (anche perché il bit di segno è trattato allo stesso modo degli altri bit).

- Il riporto sul bit di segno viene chiamato *carry;* mi cambia quindi il segno del risultato.
- Il riporto al di fuori del bit di segno viene chiamato *overflow;* il risultato è quindi al di fuori del rango dei numeri permessi da questo tipo di rappresentazione.

Si possono presentare le seguenti situazioni:

1) no carry no overflow

$$\begin{array}{r} 00100010+ \\ \underline{11010101=} \\ 11110111 \end{array}$$

In questo caso non si ha né overflow né carry, e l'operazione risulta corretta.

2) sia carry che overflow

$$\begin{array}{r} 00100010+ \\ \underline{11110101=} \\ 1\ 00010111 \end{array}$$

In questo caso si hanno sia carry che overflow. Il risultato dell'operazione è corretto in quanto si è ottenuto (in decimale): $34-11=23$. La cifra più significativa del risultato può essere trascurata perché è il 10^k della definizione di complemento $X-Y=X+C_2(N)-\underline{2^k}$ (guarda paragrafo 3.7.4)

3) carry senza overflow (ERRORE)

$$\begin{array}{l} 00100010+ \\ \underline{01110101=} \\ 10010111 \end{array}$$

Si ha un carry senza overflow. L'elaboratore segnalerà la presenza del carry in quanto fornirà un risultato dell'operazione non corretto. Infatti: 34+117= 151 che è fuori dalla dinamica dei numeri permessi. L'elaboratore legge comunque il risultato. In questo caso risulterebbe: -128+16+4+2+1= --105
Qualunque combinazione degli 8 bit fornisce un "possibile risultato". Infatti questa **rappresentazione** si dice **chiusa,** ossia aggiungendo 1 al numero più grande, cioè 127, si riottiene –128,che è il più piccolo, come se le 256 combinazioni formassero un unico collegamento chiuso.
Ritornando all'esempio occorre notare che se però successivamente si ha un'altra operazione (si parla di operazioni in cascata) con un solo overflow allora si ritorna al caso precedente e quindi il risultato delle due operazioni è corretto. Per esempio volendo eseguire l'operazione $103+90-70=123$ all'interno dell'elaboratore si ha:

$$\begin{array}{l} 01100111+ \\ \underline{01011010=} \\ 11000001 \end{array}$$

Il risultato dell'operazione $103+90$ sarebbe dunque un numero negativo per la presenza del carry. Sommando però -70 il risultato finale dell'operazione è corretto. L'overflow, infatti, ha compensato il traboccamento.

$$\begin{array}{r} 11000001+ \\ \underline{10111010=} \\ \text{cifra trascurata} \rightarrow 1\ 01111011=(123)_{10} \end{array}$$

4) overflow senza carry (ERRORE)

$$\begin{array}{r} 10010111+ \\ \underline{10100001=} \\ 1\ 00111000 \end{array}$$

Si ha un overflow senza carry, o anche **overflow reale,** quindi il risultato non è corretto.Infatti $-105-95=-200$. L'elaboratore dunque segnalerà la presenza dell'overflow. Se però successivamente si ha un'operazione con un solo carry il risultato tra le due operazioni è corretto come nel caso precedente.

4.5.3 Rappresentazione complemento a 1

Questo tipo di rappresentazione è simile a quella nella forma complemento a 2 ma è molto meno diffusa. Nella forma complemento a 1 un numero negativo è rappresentato come il complemento a 1 del corrispondente positivo; in questo modo il peso negativo associato alla cifra più significativa corrisponde a $-2^{n-1}+1$.

Ad esempio se si usano 8 bit, i valori posizionali per la forma complemento a 1 sono:

-127 64 32 16 8 4 2 1.

Il rango dei numeri rappresentabili con n bit è:

$$-2^{n-1}+1,-2^{n-1}+2,\ldots,0,\ldots,2^{n-1}-2,2^{n-1}-1$$

dinamica $\pm(2^{n-1}-1)$, nel caso in cui n=8 avremo [-127;+127]

Adesso per cui si rappresentano 255 numeri; rispetto alla rappresentazione complemento a 2 si perde infatti la combinazione 1111 1111 che prima significava -1, adesso invece rappresenta lo zero.

127	0111 1111
1	0000 0001
+0	0000 0000
-0	1111 1111
-1	1111 1110
-127	1000 0000

Anche nel caso della forma complemento a 1 il bit di segno è trattato nello stesso modo degli altri bit quindi si possono verificare carry e overflow.

Esempio.

$$\begin{array}{r} 11001010+ \\ \underline{11000101=} \\ 1\ 10001111 \end{array}$$

In questo caso si hanno un carry e un overflow. Per ottenere il risultato corretto bisogna sommare alla cifra meno significativa il valore dell'overflow cioè 10001111 + 1 = 10010000. Infatti si ottiene $-53-58=-111$. Questo metodo si chiama *wrap around carry*.

Infatti $N\text{-}M$ corrisponde, utilizzando la rappresentazione complemento a 1, a

$$N\text{-}M= N+C_{b\text{-}1}(M)\text{-}b^k+1$$

ma $$M=C_{b\text{-}1}(M)\text{-}b^k+1$$

Da ciò deriva $$N\text{-}C_{b\text{-}1}(M)=N\text{-}M+b^k\text{-}1$$

Ma siccome a noi interessa $N\text{-}M$ occorrerà togliere dal risultato ottenuto b^k e aggiungere un'unità: avremo così raggiunto il corretto risultato.

Esempio: dimostriamo stessa proprietà lavorando con un numero particolare, ossia lo zero meno(1111 1111) e aggiungendovi un'unità

1111 1111+

0000 0001=
1 0000 0000 Ma che cosa dice la regola?

Di togliere l' overflow e di aggiungerlo alla cifra meno significativa ! Si ottiene in questo modo il risultato corretto (0000 0001). Ciò è stato possibile perché si sono realizzati contemporaneamente sia un carry che un overflow

4.6 Codifica in Virgola Mobile

4.6.1 Richiami sulla rappresentazione in virgola fissa

Per la codifica di un numero possiamo usare più codici binari a seconda del tipo e della natura dell'informazione numerica considerata.
La rappresentazione fixed point o a virgola fissa si basa sull'impiego di un numero fisso di cifre per la rappresentazione della parte intera e per la parte frazionaria, secondo il seguente schema:

Il limite più evidente di una tale rappresentazione, è quello di poter esprimere solo un rango limitato di valori che può risultare spesso insufficiente per le applicazioni correnti; in particolare avendo a disposizione K cifre per la parte intera, la dinamica esprimibile è $\pm 2^K$ estremi esclusi, mentre la precisione, avendo m cifre per la parte frazionaria, è $\leq 2^{-m}$.
Per questo motivo si estende questa codifica ad una più capace da un punto di vista della dinamica; questo nuovo tipo di rappresentazione prende appunto il nome *di codifica in virgola mobile.*

4.6.2 Codifica in virgola mobile

Nei casi in cui si renda necessario un più ampio rango dei numeri rappresentabili, la codifica in virgola mobile risulta una delle soluzione più usate; è questo il caso di problemi tecnici e scientifici in cui il risultato di una operazione, o gli stessi addendi, possono comportare una accuratezza tale da dover richiedere l'uso di una dinamica e di una precisione ben al di sopra di quella possibile con la rappresentazione in virgola fissa.
La rappresentazione di un numero in virgola mobile o floating point consiste nel prodotto di due parti: il fattore scala, che è una potenza del 10 (nel caso generale) e della parte frazionaria o significativa tale che, moltiplicata per il fattore di scala fornisce il numero desiderato.
Esempio:

$$1.15 \times 10^{3} = 1150$$

E' immediato notare come questo tipo di rappresentazione non sia unico; lo stesso numero 1150 può avere infatti diverse rappresentazioni:

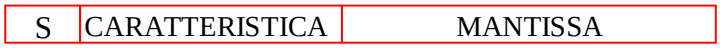
$$1150 = 1.15 \times 10^{3} = 0.115 \times 10^{4} = 0.00115 \times 10^{6} \text{ .... ecc.}$$

E' utile notare come un numero qualsiasi, non normalizzato, lo può diventare giocando sull'esponente; ad esempio:

$$0.02 \times 10^{-7} \Rightarrow 0.2 \times 10^{-8}$$

virgola a sinistra di un posto +1 <- (+1)
virgola a destra di un posto -1 -> (-1)

Per quanto riguarda le diverse forme di rappresentazione in virgola mobile, l'IEEE (The Institute of Electrical and Electronics Engineerings) ha definito alcune ' forme ' di rappresentazione che sono usate da tutti gli elaboratori; esse differiscono tra loro solo per il numero di bit riservati alla rappresentazione della mantissa e della caratteristica e hanno tutte la seguente forma generale:



dove:
- s è un bit riservato segno che può essere 0 (numero positivo) o 1 (numero negativo)
- la caratteristica è l'esponente (del due nel caso binario) del numero rappresentato
- la mantissa è la parte frazionaria (ciò che è dopo lo 0.) che, moltiplicata per 2 elevato alla caratteristica, fornisce il numero cercato.

Di queste rappresentazioni ne vedremo alcune.

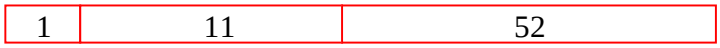
4.6.3 Rappresentazione reale corto

Usa 32 bit: 23 per la mantissa, 8 di caratteristica e 1 di segno.

i bit sono numerati da 0 a 31 a partire da quello meno significativo cioè quello più a destra.

4.6.4 Rappresentazione reale lungo

Usa 64 bit: 52 per la mantissa, 11 di caratteristica e 1 di segno.



4.6.5 Rappresentazione ' versione a 16 bit '

Usa 16 bit: 10 per la mantissa, 5 di caratteristica e 1 di segno.

Vediamo adesso come si intende per 0 nel calcolatore, infatti ci sono due possibili ' zero ':
- quello derivante da una operazione, come ad esempio 0.0×10^{3} ; questo però può succedere ad esempio per problemi legati alla cancellazione numerica derivante dalla sottrazione di due numeri molto vicini tra loro
- 0.0×10^{0} che è l'effettiva rappresentazione dello zero per il calcolatore.

4.6.6 Rappresentazione della caratteristica

La forma della caratteristica è quella dell'eccesso a t cioè :

$$C = E + t = E + (2^{K-1} - 1)$$

dove :
- C = caratteristica
- E = esponente in binario
- K = bit a disposizione per la rappresentazione della caratteristica

La forma di eccesso a t è usato per evitare l'uso di un bit di segno per la rappresentazione dell'esponente. Consideriamo infatti K = 8 (come nella forma di reale corto):

$t = 2^{8-1} - 1 = 127$, quindi $C = E + 127$

C	0	1	2	3	127 ..	.	255
E	**-127***	-126....	....	... 0	...		128

* per convenzione al posto di questo valore si considera lo 0 effettivo.

4.6.7 Dinamica

Considerando sempre la rappresentazione *reale corto* si ha una dinamica pari a :

$$\pm 2^{t+1} = \pm 2^{128}$$

4.6.8 Precisione

Per quanto riguarda la precisione, definita come il numero più piccolo rappresentabile, per la convenzione del secondo zero risulta:

$$\pm 2^{-t+1} = \pm 2^{-126}$$

Errore

Quando converto un numero in una rappresentazione in virgola mobile, se questo non è esattamente esprimibile come somma di potenze del 2, commetto sempre una imprecisione valutabile in termini di errore assoluto, relativo e percentuale.

4.6.9 Errore assoluto

$$E_a = V_v - V_R$$

dove:

- V_v = è il valore vero do rappresentare
- V_R = valore rappresentato in virgola mobile

4.6.10 Errore relativo

$$E_R = \frac{E_A}{V_V} = \frac{V_V - V_R}{V_V}$$

4.6.11 Errore percentuale

$$E_P = \frac{E_A}{V_V} \cdot 100 = \frac{V_V - V_R}{V_V} \cdot 100$$

4.6.12 Esempio di calcolo dell'errore nella conversione di un numero

1) Volendo rappresentare il numero 3002 in virgola mobile procediamo nel seguente modo:
- lo convertiamo in binario con il metodo delle divisioni successive e lo normalizziamo a zero, ottenendo :

$$(3002)_2 = 0.101110111010 * 10^{1100}$$

L'errore nasce dalla finitezza della mantissa: se nel nostro caso disponiamo di 10 bit per la sua rappresentazione vengono tagliate le ultime 2 cifre, ottenendo la rappresentazione del numero 3000. Abbiamo, in particolare:

$$E_a = 3002 - 3000 = 2$$

$$E_R = 2 / 3002 = 0.666* 10^{-3}$$

$$E_P = 0.0666\ \%$$

2) Supponiamo di voler rappresentare adesso 3422641

$$(3422641)_2 = 0.11010000111\underline{00110110001} * 10^{10110}$$

avendo per esempio 10 cifre di mantissa commettiamo un errore di 2481 cioè rappresentiamo il numero 3420160, abbiamo
quindi :

$$E_a = 3422641 - 3420160 = 2481$$

$$E_R = 2481 / 3422641 = 0.7* 10^{-4}$$

$$E_P = 0.007\ \%$$

concludiamo quindi che al crescere del numero di cifre troncate l'errore assoluto cresce e in maniera non lineare.
Nota: rappresentando il numero con una caratteristica limitata (a 10 cifre nel nostro caso), la parte che viene troncata (quella sottolineata in precedenza) è proprio l'errore assoluto che si commette (infatti abbiamo troncato 100110110001 = 2481 = E_a).
3) Supponiamo di voler convertire il numero 35.96
in questo caso, per quanto detto sopra, introdurremo un errore dovuto alla finitezza della caratteristica; infatti:

$$(35.96)_{2} = 0.1000111111 * 10^{110}$$

dove ci siamo interrotti alla 10 ° cifra della caratteristica.

Operando in questo modo, ciò che abbiamo rappresentato non è il numero 35.96 ma

$$(0.1000111110 * 10^{110})_{10} = 35.9375$$

Abbiamo così :

$$E_a = 35.96 - 35.9375 = 0.0225$$

$$E_R = 0.0225 / 35.96 = 0.62 * 10^{-3}$$

$$E_P = 0.062\ \%$$

----------fine prima parte ----------